

Margföldun og deiling

Tegundir þrauta og lausnaleyðir barna

Í þessari grein er fjallað um þrautir um margföldun og deilingu, hvernig börn skilja þær og lausnaleyðir þeirra. Byggt er áfram á greiningu á þrautum um samlagningu og frádrátt, sem fjallað var um í þróunarhringjum 1 og 2. Byrjað verður á umfjöllun um grundvallartegundir af þrautum um margföldun og deilingu og lausnaleyðir sem algengast er að börn noti við að leysa þær. Það sem einkennir þær er að sameina teljanlega hluti í hópa eða skipta þeim. Í seinni hlutanum verða skoðaðar nokkrar mismunandi tegundir þrauta og hvernig hugsun barna um þær gætu verið.

Þrautir um hópa og skiptingu

Í þessum hluta verður eingöngu fjallað um þrautir um margföldun og deilingu sem hægt er að leysa með því að flokka saman í hópa eða að skipta í jafnstóra hópa þar sem enginn afgangur verður. Í þrautum um hópa og skiptingu eru alltaf þrjár stærðir eins og fram kemur í eftirfarandi dæmi:

Sólveig keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Samtals keypti hún 24 gulrætur.

Stærðirnar þrjár í þessari þraut eru fjöldi poka, fjöldi gulróta í hverjum poka og heildarfjöldi gulróta. Hvaða stærð sem er getur verið óþekkt í þraut. Þegar heildarfjöldi gulróta sem Sólveig á er óþekktur er þrautin um *margföldun*. Þegar fjöldi poka er óþekktur er þrautin um *deilingu – mælideilingu* (*e. measurement division*). Þegar fjöldi gulróta í hverjum poka er óþekktur er þrautin um *deilingu – skiptingu* (*e. partitive division*). Í *skiptingu* felst að einingum er skipt í tiltekinn fjölda hópa.

Í töflu 1 er yfirlit yfir þessa þrjár tegundir af þrautum: *Margföldun, deilingu - mælideilingu og deilingu - skiptingu*.

Tafla 1. Þrautategund

| Þrautategund | Fjöldi hópa | Fjöldi í hópi | Heildarfjöldi |
|--|-------------|---------------|---------------|
| Margföldun <i>Sólveig keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hve margar gulrætur keypti Sólveig?</i> | 4 | 6 | Óþekktur |
| Deiling – mælideiling <i>Sólveig á 24 gulrætur. Hún setur 6 gulrætur í hvern poka. Hve marga poka getur hún fyllt?</i> | Óþekktur | 6 | 24 |
| Deiling – skipting <i>Sólveig á 24 gulrætur. Hún skiptir þeim jafnt í 4 poka. Hve margar gulrætur eru þá í hverjum poka?</i> | 4 | Óþekktur | 24 |

Í margföldunarþrautum er fjöldi mengja þekktur og fjöldi staka í hverju mengi en heildarfjöldinn er óþekktur. Takið eftir að þekktu stærðirnar tákna ólíka þætti. Önnur talan tákna fjölda mengja (fjölda poka) og hin tákna hve mörg stök eru í hverju mengi (fjöldi gulróta í hverjum poka). Aðgreiningin er mikilvæg því þrautategundin endurspeglar í hlutbundnum lausnleiðum barna og leiðum þeirra við talningu.

Í deilingardæmum um mælideilingu er heildarfjöldi þekktur og fjöldi staka í hverju mengi. Fjöldi mengja (poka með gulrótum) er óþekktur. Börn notfæra sér oftast fjölda staka í hverju mengi til að mæla heildarfjöldann og þaðan kemur hugtakið *mælideiling*.

Í deilingardæmum um skiptingu er heildarfjöldi þekktur og fjöldi mengja en fjöldi staka í hverju mengi (fjöldi gulróta í poka) er óþekktur. Börn skipta heildarfjöldanum í þann fjölda mengja sem er gefinn og þaðan kemur hugtakið *skipting*. Það er mikilvægt að greina að deilingu sem er mælideiling og deilingu sem er skipting vegna þess að í byrjun leysa börn deilingardæmi á mjög ólíkan hátt og endurspeglar lausnleið þeirra hvaða upplýsingar eru gefnar.

Hér hefur verið útskýrður munurinn á lausnum barna á þremur þrautategundum um margföldun og deilingu. Þrautategundirnar tengjast en eru ólíkar með tilliti til þess hvaða stærðir eru þekktar og óþekktar í þrautinni.

Lausnleiðir barna við þrautir um margföldun, mælideilingu og skiptingu

Líkt og um þrautir um sameiningu og aðskilnað þróa börn lausnleiðir sínar í margföldun og deilingu með því að gera sér einhvers konar hlutbundið líkan af ferlinu eða sambandinu í þrautinni. Með tímanum þróa þau með sér óhlutbundnar og öflugar lausnleiðir byggðar á talningu og samlagningu/frádrætti eða notfæra sér staðreyndir um tölur og álykta út frá þeim.

Þróun lausnleiða barna:

- Hlutbundið líkan sem fylgir söguþræði
- Talning
- Talnastaðreyndir og tengslahugsun

Hlutbundnar lausnleiðir sem fylgja söguþræði

Margföldun

Í upphafi leysa börn margföldunarþrautir með því að gera sér líkan af mengjunum (nota kubba, punkta/strik, eða annað til að tákna fjöldann) og telja svo heildarfjölda staka. Eftirfarandi er lýsing á þessari leið:

Sólveig keypti 3 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hvað keypti hún samtals margar gulrætur?

Lausnarleið Andreu:

Andrea telur 6 kubba og setur saman í lengju. Hún telur svo aðra 6 kubba saman í lengju og á sama hátt telur hún 6 kubba saman í þriðju lengjuna. Hún telur svo alla kubbana og svarar: „Hún keypti 18 gulrætur.“



Myndband 1. Hlutbundið líkan – margföldun

Mynd 1. Hlutbundið líkan – margföldun

Mælideiling

Í upphafi leysa börn þrautir um mælideilingu með því að gera sér líkan sem byggir á söguþræði. Börnin búa til mengi með þeim fjölda sem tiltekinn er í hverju mengi. Þau telja svo hve mörg mengi þau hafa búið til. Það eru a.m.k. tvö tilbrigði við þessa lausnaleið eftir því hvort börnin telja fyrst heildarfjöldann og búa svo til mengin eða telja heildina seinna. Hér fylgir lýsing á þessum tveimur lausnaleiðum.

Íþróttaálfurinn á 20 mandarínur sem hann ætlar að setja í nokkra poka. Hann setur 4 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf íþróttaálfurinn marga poka fyrir allar mandarínurnar?

Hanna telur 20 kubba og setur þá saman í lengju. Hún telur svo fjóra kubba frá og setur saman í lengju. Hún telur svo aftur fjóra kubba frá á sama hátt og heldur áfram þar til hún hefur notað alla kubbana í upphaflegu lengjunni. Hún telur svo hvað hún hefur búið til margar lengjur með fjórum kubbum og svarar: „Hann þarf 5 poka.“

Adam telur 4 kubba saman í lengju og telur aftur 4 kubba á sama hátt og endurtekur þar til hann er kominn með 4 lengjur. Hann telur svo alla kubbana og sér að hann er bara kominn með 16 kubba. Hann bætir þá við einni lengju með 4 kubbum og telur svo alla kubbana aftur og sér að þeir eru nú 20. Hann telur svo hvað hann hefur búið til margar lengjur með fjórum kubbum og svarar: „5.“

Bæði börnin bjuggu til 5 mengi með 4 kubba í hverju mengi. Munurinn á lausnaleiðum Hönnu og Adams við þetta mælideilingardæmi felst í því að Hanna taldi fyrst 20 kubba og skipti þeim svo í mengi með 4 kubba í hverju en Adam bjó fyrst til mengi með 4 kubba í hverju þar til hann hafði talið samtals 20 kubba. Lausnaleiðirnar eru tilbrigði við sömu aðferðina við að leysa mælideilingardæmi og í þeim birtist sýn barnanna á þrautina. Bæði börnin gerðu sér hlutbundið líkan sem fylgir söguþræðinum.



Myndband 2: Mælideiling – hlutbundið líkan

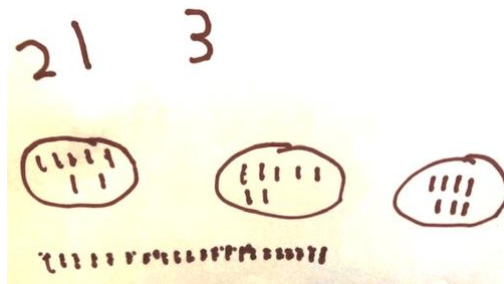
Skipting

Börn gera sér líka líkan af þrautum um deilingu – skiptingu með því að búa til mengi með stökum í. Lausnin felur í sér að finna fjölda staka í mengi í stað þess að finna fjölda mengja. Það eru nokkrar leiðir sem börn fara til að finna lausnina. Ein leið er að deila stökum, einu í einu, í réttan fjölda af mengjum, þar til búið er að nota allan fjöldann. Eftirfarandi dæmi skýrir þessa lausnaleyð:

Birna bakar 21 bollu. Hún skiptir þeim jafnt í 3 poka. Hvað eru margar bollur í hverjum poka?

Ellen telur 21 kubb. Hún setur kubba á 3 staði og telur 1 í einu. Þegar hún hefur sett 1 kubb á hvern stað byrjar hún aftur og bætir 1 kubb við í hvert mengi og heldur áfram þar til hún er búin að telja alla kubbana. Hún telur svo kubbana í einu mengi og svarar: „Það eru 7 bollur í hverjum poka.“

Á mynd 1 sést hvernig barn leysir þessa sömu þraut með teikningu.



Mynd 2. Skipting – hlutbundið líkan með teikningu

Mörg börn deila hlutum ekki út einum í einu. Þau byrja á að setja fleiri en 1 hlut í hvern hóp og bæta svo við eða taka frá eftir þörfum, eins og frásögnin að neðan lýsir:

Símon telur 21 kubb. Hann setur 3 kubba í lengju og heldur þannig áfram að setja saman 3 kubba þar til hann er kominn með 3 lengjur. Hann sér að hann hefur ekki notað alla kubbana og bætir 2 kubbum við í hverja lengju og bætir svo 1 kubb við í einu þar til hann hefur notað alla kubbana. Hann telur svo kubbana í einni lengju og svarar „7.“

Þó svo að Símon hafi sett 3 kubba í hvert mengi er lausnaleyð hans við að leysa þetta deilingardæmi um skiptingu mjög ólík lausnaleyðinni við deilingardæmum um mælideilingu. Tilgangur Símonar var ekki að setja 3 kubba í hvert mengi, hann ætlaði að búa til 3 mengi með sama fjölda í hverju og nota alla kubbana. Þegar hann sá að hann hafði ekki notað alla kubbana bætti hann við í hvert mengi. Hann gæti hafa byrjað með 3 í hverju mengi vegna þess að sú tala var nefnd í þrautinni, en honum tókst að aðlaga fjölda hluta í hverju mengi.

Sum börn byrja á að leysa þrautir um skiptingu með því að setja of mörg stök í hvert mengi. Símon gæti t.d. hafa giskað á að Birna hefði sett 8 bollur í hvern poka og sett 8 kubba í hverja lengju. Þá hefðu kubbarir ekki dugað í þrjá poka og hann hefði þurft að taka kubba af lengjunum til að geta búið til þá síðustu.

Stundum reyna börn að sýna hvert mengi fyrir sig með hlut sem ekki er hluti af heildarfjöldanum. Þetta gerir þeim kleift að búa til réttan fjölda af hópum áður en þau fara að deila út hlutunum sem á að skipta. Þetta getur virst ruglandi en flest börn eiga ekki í erfiðleikum með að greina á milli hlutanna sem tákna mengið og stakanna í menginu þegar þau nota þessa aðferð. Lausnaleyð Jasmínar á eftirfarandi þraut um skiptingu er dæmi um þetta.

Hrund bakaði 20 bollur. Hún skipti þeim jafnt í 4 poka. Hvað eru margar bollur í hverjum poka?

Jasmín byrjar á að telja 20 kubba. Hún tekur svo 4 kubba, sem eru ekki hluti af kubbunum 20, setur þá í röð fyrir framan sig og notar þá til að tákna pokana 4. Hún deilir kubbunum, einum í einu, á hvern af „pokunum“ 4. Þegar hún hefur deilt út öllum 20 kubbunum telur hún fjölda kubbana í einum hópnum (pokanum) en telur ekki með kubbinn sem hún notaði til að tákna pokann og svarar: „5.“

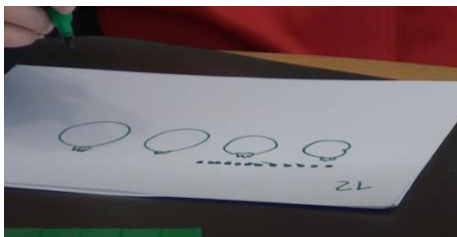
Kennari: Gott. Ég sé hvernig þú fékkst 5, en geturðu sagt mér hvers vegna þú telur ekki þennan með [bendir á kubbinn sem táknaði pokann]?

Jasmín: Þetta er einn af pokunum.

Sum börn byrja ekki á að telja heildarfjöldann, líkt og í dæmunum um mælideilingu, en halda utan um fjöldann þegar þau setja kubbana (eða annað sem þau telja) í hópa. Geir fer þessa leið þegar hann leysir eftirfarandi þraut:

Hrund bakar 12 bollur. Hún skiptir þeim jafnt í 4 poka. Hvað eru margar bollur í hverjum poka?

Geir telur um leið og hann setur 4 kubba á ólíka staði á borðinu og segir: „1, 2, 3, 4.“ Hann setur svo einn kubb við hliðina á einum af hverjum kubbanna og telur: „5, 6, 7, 8.“ Hann heldur áfram að bæta einum kubbi við hvert mengi og segir: „9, 10, 11, 12.“ Hann telur svo kubbana í einu mengi og segir „3.“



Myndband 3 – Skipting – hlutbundið líkan – teikning

Þessi dæmi um lausnaleyðir sem börn nota við að leysa deilingardæmi um skiptingu eru bara tilbrigði við lausnaleyðina *skiptingu*. Þegar börn skipta jafnt á milli eru þau á einn eða annan hátt að hlutgera ferlið eða tengslin sem koma fram í deilingardæmum um skiptingu.

Heildarfjöldi staka er skipt í gefinn fjölda mengja og fjöldi staka í einu eða fleirum af mengjunum er talinn til að finna svarið.

Í töflu 2 er yfirlit yfir hlutbundnar lausnaleyðir tengdar dæmum um *margföldun*, *deilingu* – *mælideilingu* og *deilingu* – *skiptingu*.

Tafla 2. Hlutbundnar lausnaleyðir – margföldun og deiling

| Þraut | Lausnaleyð |
|---|--|
| Margföldun Sólveig á 4 poka af gulrótum. Það eru 6 gulrætur í hverjum poka. Hve margar gulrætur á Sólveig samtals? | Hópar Gerir fjóra hópa með 6 kubbum í hverjum. Telur alla kubbana til að finna svarið. |
| Deiling – mælideiling Sólveig á 24 gulrætur. Þær hafa verið settar í poka. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hve marga poka af gulrótum á hún? | Mæling Setur 24 kubba í hópa með 6 kubbum. Telur fjölda lengja til að finna svarið. |
| Deiling – skipting Sólveig á 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru jafnmargar gulrætur. Samtals á hún 24 gulrætur. Hve margar gulrætur eru í hverjum poka? | Skipting Skiptir 24 kubbum í 4 hópa með sama fjölda kubba í hverjum hópi. Telur fjölda kubba í einum hópi til að finna svarið. |

Til að geta leyst margföldunar- og deilingardæmi með því að gera sér hlutbundið líkan þurfa börn að gera sér grein fyrir að þau geta talið hópa af hlutum jafnt sem einstaka hluti. Þau þurfa líka að bera skynbragð á að fjöldi (svo sem 24) getur verið settur saman úr jafn stórum hópum með öðrum fjölda (t.d. 6 hópar af 4). Fullorðnum geta virst þessi lögmál augljós en börn þurfa tíma og reynslu til að öðlast slíkan skilning. Margir telja að börnum reynist erfitt að öðlast þennan skilning og hefur það oft leitt til þess að margföldunar- og deilingardæmi hafa ekki verið kynnt börnum fyrr en á miðstigi. Rannsóknir Carpenter o. fl. (2015) hafa þó staðfest að flest börn á leikskólaaldri eru fær um að gera sér líkan af og leysa þrautir um margföldun og deilingu. Reynsla af að leysa margföldunar- og deilingarþrautir í leikskóla og fyrsta bekk grunnskóla geta stutt við skilning á margföldun, deilingu og uppbyggingu tugakerfisins og hugtökum tengdum þeim.

Hlutbundið líkan með skráningu

Líkt og í þrautum tengdum sameiningu og aðskilnaði geta börn sýnt hlutbundnar lausnaleyðir sínar á margföldunar- og deilingardæmum á blaði. Í raun getur skráning skýrt vel hvernig skipt er í hóp.

Anna þakkar eplum í poka. Hún setur 6 epli í hvern poka. Hvað eru mörg epli í 5 pokum?

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

Mynd 3. Skráning – margföldun

Leiðir við talningu og samlagningu/frádrátt

Á sama hátt og við lausnir á samlagningar- og frádráttarþrautum fara börn smám saman að nota talningu við lausnir sínar í margföldun og deilingu. Það reynist þó börnum erfiðara að nota talningu við slíkar þrautir.

Lausnaleiðir með talningu á þrautum um margföldun og mælideilingu fela oft í sér einhvers konar hopptalningu. Hér fylgir dæmi um lausnaleið þar sem hopptalning er notuð:

Það eru þrjú boltar í körfu. Hvað eru margir boltar í 7 körfum?

Linda: [muldrar lágt og lyftir einum fingri í einu þar til hún hefur lyft 7 fingrum] 21 – það eru 21 boltar.

Kennari: *Geturðu sagt mér hvernig þú veist að það voru 21?*

Linda: Ég taldi upp í 21.

Kennari: *Geturðu leyft mér að heyra hvernig þú taldir?*

Linda: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. [Hún lyftir einum fingri í hvert sinn sem hún nefnir tölu til að halda utan um hve oft hún hefur bætt þremur við.]

Kennari: *Hvernig vissirðu að þú ætti að stoppa við 21?*

Linda: Ég hélt utan um talninguna með fingrunum.

Kennari: *Hvernig hélstu utan um talninguna?*

Linda: Ég gerði 3 [sýnir greinilega hvernig hún lyftir einum fingri], 6 [lyftir öðrum fingri]. [Linda heldur áfram að telja á þremur og lyfta einum fingri í einu þar til hún hefur lyft 7 fingrum og talið á þremur upp í 21.]

Börn nota talningaleiðir til að leysa þrautir um margföldun og deilingu á svipaðan hátt og þau nota talningu við að leysa þrautir um samlagningu og frádrátt. Í báðum tilfellum eru börnin í raun að telja tölur í talnaröð. Munurinn felst í því að í samlagningu og frádrætti eru börnin að telja tölurnar í staðlaðri talnarunu en í margföldun og deilingu eru þau að telja tölurnar í hopptalningarrunu. Til þess að geta leyst þrautir með hopptalningu þurfa börn að hafa skilning á því að hægt er að telja fjölda í hópi á sama hátt og einstakir hlutir eru taldir.

Börn eru almennt leiknari í hopptalningu með ákveðnum tölum eins og þremur og fimm en öðrum svo sem sjö. Sum börn eru líka bara leikin í hopptalningu á fyrstu þremur til fjórum tölunum í talnarunu og þurfa að ljúka talningunni með því að telja á einum. Þá nota þau oft bæði hopptalningu og talningu á einum. Eftirfarandi dæmi skýrir vel hvernig barn notar þess aðferð:

Kennarinn á 5 spjöld með límmiðum. Það eru 4 límmiðar á hverju spjaldi. Hvað á hann marga límmiða?

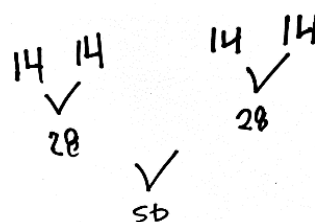
Jóna telur: „Sjáum til , 4, 8, 12[hlé], 13, 14, 15, 16 [hlé], 17, 18, 19, 20 [hlé] – 20 límmiðar.“

Jóna gat talið á fjórum upp í 12. Eftir það þurfti hún að telja á einum, sem hún gerði í tveimur skrefum. Athugið að þegar börn nota hopptalningu telja þau á fjölda hluta í hverjum hópi, ekki fjölda hópna. Þau halda utan um fjölda hópanna með því að nota fingur, eða á

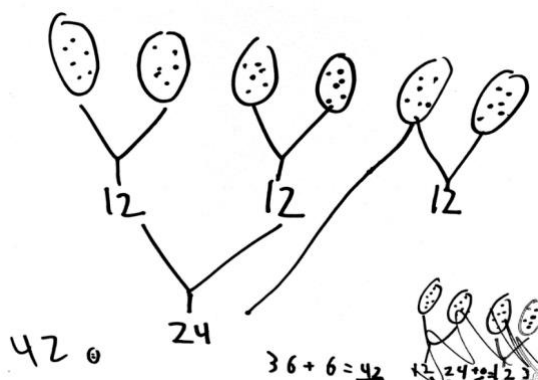
annan hátt. Þetta er eðlileg þróun á hlutbundinni lausnaleið og er í samræmi við hvernig þau setja hluti í hópa þegar þau gera sér hlutrænt líkan. Börn koma ekki auðveldlega auga á að þau geta talið á hvorri tölunni sem gefin er í margföldunarþrautum. Í þrautinni hér að framan gæti hafa verið auðveldara að telja á 5, en Jóna gerði það ekki vegna þess að það voru 4 hlutir í hverjum hópi.

Mörg börn nota samlagningaraðferðir við að leysa margföldunar- og deilingardæmi. Í stað þess að nota hopptalningu leggja sum börn til dæmis endurtekið saman fjölda í hverjum hópi. Hopptalning er í eðli sínu endurtekin samlagning og sum börn virðast líta á lausn sína fremur sem talningu en önnur líta fremur á hana sem samlagningu. Samlagningaraðferðir eins og dæmin um tvöföldun, sem hér fylgja, opna fyrir fleiri leiðir til að leysa þrautir.

Birna bakar bollur. Hún skiptir þeim í fjóra poka og setur 14 bollur í hvern poka. Hve margar bollur bakar hún?



Mynd 4. Tvöföldun



Mynd 5. Tvöföldun

Ípróttaálfurinn setur 42 mandarínur í poka. Hann setur 6 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf ípróttaálfurinn marga poka fyrir allar mandarínurnar?

Talningarleiðir við mælideilingu

Börn nota sams konar talningar-, samlagningar- og frádráttaraðferðir til að leysa mælideilingardæmi og þau nota við margföldun. Munurinn felst í að börn nota hopptalningu, leggja við eða draga frá þar til þau koma að tölunni sem gefin er. Svárið felst í hve oft þau hafa talið, lagt við eða dregið frá eins og fram kemur í eftirfarandi lausn á þraut um mælideilingu:

Ípróttaálfurinn á 24 mandarínur sem hann setur í poka. Hann setur 4 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf hann marga poka?

Samúel telur: „Hm, 4, 8, 12, 16, 20, 24.“ Hann lyftir einum fingri um leið og hann nefnir tölu. Þegar hann hefur lokið talningunni lítur hann á fingurna sem hann hefur lyft og segir „6. Hann þarf 6 poka.“

Athugið að líkt og í þrautum um margföldun notaði Samúel hopptalningu til að telja fjölda í hverjum hópi. Þessi leið fylgir samhenginu í þrautinni.

Talningarleiðir við deilingu – skiptingu

Það er miklu erfiðara að nota aðferðir sem byggja á talningu eða samlagningu við að leysa deilingardæmi um skiptingu heldur en við að leysa margföldunar- og mælideilingardæmi. Í margföldunar- og mælideilingardæmum hopptelja börnin á tölunni sem segir til um fjölda í hópi. En í deilingardæmum um skiptingu er fjöldinn í hverjum hópi óþekktur. Til þess að nota talningaraðferð sem fylgir ferlinu í þrautinni prófa börn sig þess vegna oft áfram til þess að finna út á hvaða tölu þarf að hopptelja eða hvaða tölu þarf að leggja við. Þau vita hver fjöldi hópa er og einnig heildarfjöldinn. Fjöldi hópanna segir börnunum hve margar tölur eiga að vera í hopptalningarruninni og heildarfjöldi hluta segir þeim hvenær þau eiga að hætta hopptalningunni. Vandamálið er að finna út á hvaða tölu á að telja (fjöldi í hverjum hópi). Þá grípa þau til þess að prófa sig áfram eins og sést í eftirfarandi dæmi:

Ípróttaálfurinn á 24 mandarínur sem hann skiptir jafnt í 6 poka. Hvað fara margar mandarínur í hvern poka?

Sunna telur, „sjáum til 3,6, 9, 12, 15, 18.“ Í hvert sinn sem Sunna nefnir tölu lyftir hún einum fingri. Þegar hún hefur lyft 6 fingrum stoppar hún. „Nei, það eru ekki nógu margar. Ég ætla að prófa 4. 4, 8, 12, 16, 20, 24.“ Sunna lyftir aftur einum fingri í hvert sinn sem hún nefnir tölu. Þegar hún hefur talið upp í 24 sér hún að hún hefur lyft 6 fingrum. „Þetta er rétt. Það verða 4 í hverjum poka.“

Vandamál Sunnu var í rauninni að finna tölu til að telja á, þannig að þegar það voru komnar 6 tölur í talnarununa yrði heildarfjöldinn 24. Hún vissi ekki á hvaða tölu hún þurfti að telja svo hún notaði ágiskun. Fyrsta ágiskun leiddi hana ekki að réttu svari. Hún hafði lyft 6 fingrum sem gaf til kynna að hún hefði talið 6 sinnum en hún var ekki ennþá komin upp í 24. Þess vegna þurfti hún að byrja aftur með aðra tölu. Hún sá að 3 var of lág tala, svo hún prófaði 4. Það er talsvert erfiðara að nota aðferðir sem byggja á talningu við að leysa deilingardæmi um skiptingu heldur en að leysa margföldunar- og mælideilingardæmi.

Skráning á talningaraðferðum

Eins og í talningaraðferðum fyrir samlagningar- og frádráttarþrautir er hægt að sýna talningaraðferðir með því að skrá tölurnar í talnarununni. Á myndum 6 og 7 sést skráning á talningaraðferð sem notuð var við að leysa margföldunar- og mælideilingarþrautir. Þó svo að skráningin virðist lík, þá er lausnin á margföldunarþrautinni lokatalningin en lausnin á mælideilingarþrautinni fjöldi talninga.

Elín á fimm pakka af
fótboltamyndum. Í hverjum
pakka eru fjórar myndir.
Hve margar myndir á hún?

$$4+4+4+4+4$$
$$4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \quad 20$$



Mynd 6. Skráning á talningaraðferð – margföldun

$$3+3+3+3+3+3$$
$$3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18$$



Bragi á 18 límmiða. Hann setur
þrjú límmiða á hverja blaðsíðu í
límmiðabókinni sinni. Á hve
margar blaðsíður límir hann
límmiða?

Mynd 7. Skráning á talningaraðferð – mælideiling

Lausnaleyðir sem byggja á talnastaðreyndum

Líkt og í samlagningu og frádrætti þá læra börn sumar margföldunarstaðreyndir á undan
öðrum. Þau geta nýtt sér staðreyndir sem þau þekkja til að álykta um aðrar staðreyndir eins
og sést í eftirfarandi dæmi:

Sólveig kaupir 3 poka af gulrótum. Það eru 8 gulrætur í hverjum poka.

Siggi: Ég veit að 2 áttur eru 16 og svo lagði ég 8 við til að fá 24.

Annað dæmi:

*Ef ég ætti 8 poka af gulrótum með 6 gulrótum í hverjum poka, hve margar gulrætur ætti ég
þá?*

Tumi: 4 sexur eru 24 og aðrar 4 sexur eru 24, svo 8 sexur eru 48, 48 gulrætur.

Margrét: Ég gerði þetta öðru vísi og fékk líka 48. Ég veit að 6 sexur eru 36 og að 2 sexur
eru 12, svo 8 sexur eru 36 plús 12, 48.

Jakob: Ég fór aðra leið. Ég veit að 8 þristar eru 24, og 8 þristar í viðbót eru líka 24, legg þá
saman og það er það sama og 8 sexur af því að 3 plús 3 eru 6. 24 plús 24 eru 48 gulrætur.

$$\begin{array}{l} 4 \times 6 = 24 \\ 4 \times 6 = 24 \\ 40 + 8 = 48 \end{array}$$

Mynd 8. Skráning Tuma

$$\begin{array}{l} 8 \times 3 = 24 \\ 8 \times 3 = 24 \\ 3 + 3 = 6 \\ 24 + 24 = 48 \end{array}$$

Mynd 9. Skráning Jakobs

Bæði Tumi og Margrét skiptu fjölda hópanna. Jakob skipti aftur á móti fjöldanum í hverjum hópi í stað fjölda hópa. Í upphafi skipta börn oftast bara annarri stærðinni, þegar þau draga ályktanir af staðreyndum, en ekki báðum.

Sum börn nota bæði margföldun og deilingu þegar þau álykta út frá staðreyndum.

Iðunn á 9 búnt af blöðrum. Það eru 5 blöðrur í hverju búnti. Hve margar blöðrur á Iðunn?

Hans: 9 tugir eru 90, en það eru 5 blöðrur í hverju búnti, ekki 10 svo ég skipti því í 2, það eru 45.

Þar sem margföldun og deiling eru tengdar aðgerðir, þá nota börn oft þekkingu sína á margföldun til að álykta um deilingu.

Iðunn á 56 blöðrur. Hún ætlar að festa þær saman í búnt. Hvað getur hún búið til mörg búnt ef hún setur 7 blöðrur í hvert búnt?

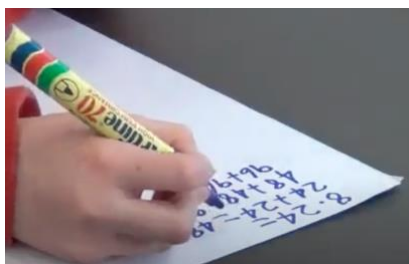
Eva: 3 sjöur eru 21 og 3 sjöur í viðbót eru 21, 21 plús 21 eru 42, svo ég þarf, sko, 14 í viðbót til að fá 56. 14 eru 2 sjöur. 3 sjöur plús 3 sjöur plús 2 sjöur eru 8 sjöur. Það þýðir að 8 sjöur eru 56. Hún getur búið til 8 búnt.

Kennari: Eva, ég skil ekki hvað þú gerðir.

Eva: Ég var að reyna að finna út hve margar sjöur eru í 56. Ég vissi það ekki en ég veit að 3 sjöur eru 21. Ef hún ætti 21 blöðru þá gæti hún búið til 3 búnt. Svo 21 blaðra í viðbót og þá ætti hún 14 blöðrur eftir. 2 sjöur eru 14 svo hún gæti búið til 2 búnt í viðbót. 3 plús 3 plús 2 eru 8.

$$\begin{array}{l} 3 \times 7 = 21 \\ 3 \times 7 = 21 \\ 2 \times 7 = 14 \end{array} \begin{array}{l} > 42 \\ > 56 \end{array}$$
$$3 + 3 + 2 = 8$$

Mynd 10. Skráning Evu á lausnaleyð sinni við þraut sem byggir á mælideilingu



Myndband 4: Margföldun – tengslahugsun (tvöföldun og dreifiregla)

Algeng tengsl sem börn nota til að álykta út frá margföldunarstaðreyndum

Börn læra sumar margföldunarstaðreyndir á undan öðrum. Þau geta nýtt sér staðreyndir sem þau þekkja til að álykta um staðreyndir sem þau þekkja ekki. Algengustu tengslin sem börn nota til að draga ályktanir um margföldunarstaðreyndir eru:

Margfalda með 3: Börn sem margfalda tölu 3 sinnum gera sér grein fyrir að 3 hópar af hvaða fjölda sem er það sama og 2 hópar af sama fjölda plús 1 hópur í viðbót.

Margfalda með 4: Mörg börn átta sig á að 4 sinnum einhver tala er það sama og 2 sinnum talan plús 2 sinnum talan. Barn gæti til dæmis áttað sig á að 4 hópar af 6 er það sama og 2 hópar af 6 plús 2 hópar af 6 í viðbót ($4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 12 + 12$).

Margfalda tölu með 5: Mörg börn læra snemma staðreyndir um margfeldi af 5 því það er auðvelt að telja á fimm og talnarunan fylgir mynstri. Það virðist börnum auðveldara að margfalda með 5 þegar þau geta séð 5 fyrir sér sem fjölda í hópi, fremur en fjölda af hópum.

Víxlregla í margföldun: Börn verða leiknari í að nota þær aðferðir sem byggja á að draga ályktanir af staðreyndum sem fjallað var um að ofan ef þau skilja að margföldun er víxlin aðgerð ($a \cdot b = b \cdot a$). Börn eiga þó erfiðara með að skilja víxlina eiginleika margföldunar en skilja víxlina eiginleika samlagningar. Í þrautum um jafn stóra hópa er alls ekki augljóst hvers vegna til dæmis það er sami fjöldi í 6 hópum með 9 hlutum og í 9 hópum með 6 hlutum.

Þegar skilningur barna á margföldun og deilingu þróast, geta þau nýtt sér stöðugt fleiri talnastaðreyndir sem þau muna til að geta ályktað um staðreyndir sem þau muna ekki. Lausnaleyðir þeirra við orðadæmi verða sveigjanlegar, líkt og leyðir þeirra við að leysa jöfnu svo sem $7 \cdot 8 = _$, og þau verða leikin í að nota talnastaðreyndir við að leysa þrautir.

Það styður börn við stærðfræðinámið að fá nægan tíma til að nota, ræða og ígrunda lausnaleyðir sem byggja á að draga ályktanir af staðreyndum, án þess að ætla þeim að læra staðreyndir um margföldun utanbókar. Börn þróa með sér skilning á eiginleikum margföldunar og tengslum margföldunar og deilingar jafnframt því að þróa með sér hæfileikann til að leysa margföldunar- og deilingardæmi af öryggi og nákvæmni. Áhersla á skilning á talnastaðreyndum styður líka börn við að gera sér grein fyrir að það er hægt að skilja og rökræða um stærðfræði í stað þess að líta á hana sem safn ótengdra staðreynda og aðferða sem þarf að læra.

Þrautir um margföldun og deilingu á yngsta stigi grunnskóla

Það er mikilvægt að kynna orðadæmi um margföldun og deilingu snemma í stærðfræðinámsefni. Ef leikskólabörn fá tækifæri til að fást við þrautir læra þau með reynslunni að leysa margföldunar- og deilingardæmi með því að telja hluti eða teikna til að gera sér líkan af hópunum sem lýst er í þrautinni. Í fyrsta og öðrum bekk nota börn oft margskonar aðferðir við að leysa orðadæmi um margföldun og deilingu. Ef slíkar þrautir eru felldar inn í námsefni á yngsta stigi fá börn tækifæri til að þróa með sér grundvallarskilning á margföldun og deilingu og jafnframt aukin tækifæri til að leysa þrautir í margskonar samhengi. Það er líka hvatning fyrir börn að glíma við þrautir þegar þau fá tækifæri til að fást við svo fjölbreyttar tegundir af þrautum fremur en að nota yfirborðskenndar aðferðir til að ákveða hvort leggja eigi saman eða draga frá tölur sem koma fyrir í þrautum. Ung börn geta leyst þrautir eins og þær sem hér hefur verið rætt um þó þau þekki ekki táknið fyrir margföldun og deilingu (\cdot , $:$) og ástæðulaust að kynna þau fyrr en börnin eru farin að geta skráð lausnir sínar á táknmáli stærðfræðinnar.

Þegar börn leysa margföldunar- og deilingardæmi fá þau tækifæri til að þróa með sér skilning á þeim grundvallarhugmyndum um hópa sem tugakerfið byggir á. Í raun eru dæmi með tugtölum margföldunar og deilingardæmi með hópum með 10 stökum í. Þannig er dæmið: „Hve margir tugir eru í 73?“ mælideilingardæmi. Algengt er að kynna hugmyndina sem tugakerfið byggir á með því að börn telji hluti í hópa með 10 hlutum í hverjum hópi. Það er hliðstæða við aðferðina sem börn nota til að leysa mælideilingardæmi sem fela í sér hópa af 10 stökum.

Gagnlegt er fyrir börn að leysa margföldunar- og deilingardæmi áður en þau kynnast þeim grundvallarhugmyndum sem tugakerfið byggir á. Þannig skapa þau sér forsendur til að þróa með sér skilning á þeim, en það er nauðsynleg undirstaða til að skilja tugatölur. Þegar börn læra um þær grundvallarhugmyndir sem tugakerfið byggir á þurfa þau í raun bara að átta sig hvernig flokkað er í hópa með 10 stökum í hverjum og hvernig sú flokkun tengist nöfnunum sem þeim eru gefin. Það að gefa börnum öflug tækifæri til að á fást við fjölbreytt margföldunar- og deilingardæmi hefur því í för með sér að þau hafa forsendur til að öðlast djúpan skilning á stærðfræði sem hefur merkingu fyrir þeim.

Heimildir

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2. útg), 4. kafli. Heinemann.

Þýðing og staðfæring texta:

Jónína Vala Kristinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, Háskóla Íslands og Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Háskólanum í Norður-Iowa

Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2021). „Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum“: Hugsun barna um margföldun.

[Skólaþræðir: Tímarit Samtaka áhugasfólks um skólaþróun](#). Birt 24. apríl 2021.

Viðauki:

Önnur margföldunar- og deilingardæmi

Þau margföldunar- og deilingardæmi sem rætt hefur verið um fram til þessa hafa falið í sér að setja saman í hópa eða skipta safni hluta sem hægt er að telja. Það eru til samsvarandi þrautir sem fela í sér margföldunarsamanburð og/eða magn sem er mæling fremur en safn teljanlegra hluta. Þessar þrautir eru svipaðar að gerð og þau margföldunar- og deilingardæmi sem við höfum þegar kynnt, að því leyti að þau fela í sér stæður um margföldun, skiptingu eða mælideilingu. Mörg dæmi eru af annarri gerð. Dæmi um flatarmál, raðir/dálka eða samsetningar eru byggðar upp á allt annan hátt.

Þrautir sem fela í sér mælingu

Í sumum þrautum eru ekki teljanlegir hópar. Í stað þess er þar að finna mælingar á magni sem börn geta sýnt. Þrautir um magn sem ekki er hægt að telja eru meira óhlutbundnar en þrautir sem fela í sér teljanlega hópa með hlutum, en ef þrautagerðin byggir á sömu gerð og þrautir um hópa, geta ung börn leyst þau. Skoðið eftirfarandi þrautir:

Margföldun: *Fílsungi þyngist um 3 kíló á dag. Um hve mörg kíló mun fílsunginn þyngjast á 8 dögum?*

Mælideiling: *Fílsungi þyngist um 3 kíló á dag. Hvað tekur það fílsungann marga daga að þyngjast um 24 kíló?*

Deiling – skipting: *Fílsungi þyngdist um 24 kíló á 8 dögum. Ef hann þyngdist um jafn mörg kíló á hverjum degi, hve mikið þyngdist hann á dag?*

Hvert þessara dæma felur í sér mælingu fremur en fjölda hluta. Í hverju tilviki snýst mælingin um kíló á dag. Þó svo að dagarnir 8 séu í raun ekki hópar og 3 og 24 séu ekki teljanlegir hlutir, eiga þessar þrautir margt sameiginlegt með þeim þrautum um hópa og skiptingu sem rætt var um framar í kaflanum og því er hægt að hugsa um þrautina á sama hátt. Barn gæti séð fyrir sér í huganum hve miklu fíllinn bætir við sig á einum degi, tveimur dögum o.s.frv. Þannig gæti það leyst fyrstu þrautina með því að telja kubba í 8 hópa, og setja 3 kubba í hvern hóp. Hver hópur með 3 kubbum táknaði þá hve mikið fílsunginn þyngdist á hverjum degi og heildarfjöldi kubba táknaði þá heildarþyngdina sem hann bætti við sig.

Aðra þrautina væri hægt að leysa með því að telja 24 kubba, taka 3 kubba frá, setja þá saman í hóp og endurtaka þar til búið er að telja alla kubbanda í hópa. Hóparnir eru svo taldir til þess að finna út hve marga daga það tæki ungana að bæta við sig 24 kílóum. Síðustu þrautina væri hægt að leysa með því að skipta 24 kubbum í 8 hrúgur, sem tákna dagana og telja kubbanda í hverri hrúgu til að finna út hve mikið fílsunginn þyngdist á hverjum degi. Þó svo að í þessum þrautum felist ekki sýnileg aðgerð þar sem fengist er við hópa, þá geta börn leyst þau á sama hátt og þau leysa þrautir um hópa og skiptingu.

Hér fylgja tvær þrautir um mælingar þar sem samhengið er vel þekkt:

Hve marga kílómetra er hægt að fara á 3 klukkustundum á hjóli ef meðalhraði er 12 km á klukkustund?

Hringekjan í Húsdýragarðinum snýst 3 hringi á mínútu. Hve margar mínútur tekur það hana að snúast 18 hringi?

Margföldunarþrautir um samanburð

Í þrautum sem fjallað hefur verið um hingað til tákna tölurnar einhvers konar magn: fjölda hópa, fjölda hluta í hópi, heildarfjölda hluta, mælingu á tíma, hraða, lengd o.s.frv. Í þrautum um margföldunarsamanburð á þetta ekki við. Margföldunarþrautir um samanburð fela í sér samanburð á tveimur stærðum þar sem önnur er margfeldi af hinni. Talan sem segir til um stærð sambandsins er ekki mælanlegur fjöldi. Í eftirfarandi þraut er þyngd dýranna mælanleg stærð en hin stærðin (þrisvar sinnum meira) útskýrir einfaldlega sambandið milli mælanlegra stærða. Til að geta leyst þessa þraut og aðrar margföldunarþrautir um samanburð þurfa börn að skilja hvað „þrisvar sinnum meira“ merkir.

Jóna eignaðist lítinn bróður sem heitir Pétur. Jóna er þrisvar sinnum þyngri en hann. Pétur vegur 3 kíló. Hve þung er Jóna?

Það er hægt að semja margföldunarþrautir um samanburð fyrir allar grunntegundirnar af þrautum eins og fram kemur í eftirfarandi dæmum.

Margföldun: *Gíraffinn í dýragarðinum er tvisvar sinnum hærrí en kengúran. Kengúran er 2 m há. Hvað er gíraffinn hár?*

Mælideiling: *Gíraffinn í dýragarðinum 4 m hár. Hvað er gíraffinn mörgum sinnum hærrí en kengúran?*

Deiling – skipting: *Gíraffinn í dýragarðinum 4 m hár. Hann er tvisvar sinnum hærrí en kengúran. Hvað er kengúran há?*

Algengir þættir

Munurinn á öllum þessum þrautum getur verið lítill og ekki er nauðsynlegt að hafa áhyggjur af hvort þrautir tilheyri einum flokki eða öðrum. Almennt er það þannig að því nær sem inntak þrautar er því að hægt sé að telja hluti saman í hópa, þeim mun auðveldara er fyrir börn að leysa hana. Það er mikilvægt fyrir börn að fá að vinna með þrautir sem endurspeglar ólíkan skilning á margföldun og deilingu. Gott getur þó verið að bíða með að leggja fyrir margföldunarþrautir um samanburð, eða þrautir þar sem stærðirnar byggja á mælingum, þar til þau hafa öðlast góðan skilning á þrautum um hópa.

Samhverfar þrautir: Flatarmál, raðir/dálkar og þrautir um samsetningar

Eitt mikilvægt einkenni á öllum tegundum þrauta sem rætt hefur verið um hér að framan er að þær eru ekki samhverfar. Með því er átt við að tölurnar í þeim eru tengdar ákveðnu viðmiði og þeim er ekki hægt að skipta út fyrir viðmiðin. Þegar talað er um 5 poka af

gulrótum í þraut, með 7 gulrótum í hverjum poka, þá hugsa ung börn í upphafi um 5 í tengslum við fjölda poka og 7 í tengslum við gulrætur í hverjum poka. Ungum börnum er almennt ekki augljóst að þau gætu líka leyst þrautina með því að búa til 7 hópa með 5 hlutum í hverjum hópi, eða að þau geti talið á 5.

Það kemur að því að börn þurfa að læra að $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$, en það er mikilvægt að gera sér grein fyrir að ung börn skilja ekki strax að það er hægt að víxla tölunum tveimur í margföldunarþrautunum sem rætt var um að ofan. Þau átta sig ekki heldur strax á því að aðferðirnar sem þau nota til að leysa mælideilingardæmi er líka hægt að nota við að leysa deilingardæmi um skiptingu. En það eru til margföldunar- og deilingardæmi þar sem þættirnir hafa sama hlutverk. Þessar þrautir eru samhverfar. Þrautir um flatarmál, raðir/dálka og samsetningar eru samhverfar.

Þrautir um flatarmál (fylki, reiti, raðir/dálka)

Margföldun er gagnleg þegar finna á flatarmál rétthyrnds svæðis. Það má reikna út með því að margfalda saman lengd svæðisins og breidd þess. Það felur í sér skilning á margföldun sem er mjög ólíkur því sem rætt hefur verið um hér að framan. Flatarmálsþrautir skera sig frá öðrum margföldunar- og deilingarþrautum. Þegar talið er í hópa, deilt, notuð hlutföll eða beitt margföldunarsamanburði gegna þættirnir tveir ólíkum hlutverkum en þannig er það ekki í flatarmálsþrautum. Jafnvel þó lengri hliðin á rétthyrningi sé oft kölluð lengdin og sú styttri breiddin gegna lengd og breidd í meginatriðum sama hlutverki þegar flatarmál rétthyrnings er reiknað út.

Flatarmálsþrautir eru þannig dæmi um eina tegund af margföldunar- og deilingarþrautum. Vegna þess að það er hægt að víxla báðum þáttunum í flatarmálsþrautum eru ekki til tvær ólíkar tegundir af deilingarþrautum um flatarmál. Það má því segja að það skipti ekki máli hvort lengd eða breidd er óþekkt, vegna þess að lengd og breidd gegna sama hlutverki í flatarmálsþrautum.

Birna bóndi setur kartöflur niður í rétthyrndan reit sem er 6 m að lengd í aðra áttina og aðliggjandi hlið er 8 m löng.

Birna bóndi ætlar að setja kartöflur niður í rétthyrndan kartöflugarð. Hún hefur nægt pláss til að gera garðinn 6 m langan. Hve löng þarf aðliggjandi hlið að vera til þess að garðurinn verði 48 fermetrar (m^2) að stærð?

Til þess að öðlast skilning á flatarmáli þarf meira til en að margfalda saman hliðar rétthyrnings til að reikna út flatarmálið. En börn geta leyst þrautir þar sem margföldun og deiling er kynnt í flatarmálssamhengi áður en þau hafa náð fullum skilningi á flatarmálshugtakinu. Eftirfarandi er dæmi um þraut sem börn gætu leyst, með því að gera sér líkan, áður en þau hafa öðlast formlega hugmynd um flatarmál.

Birna bóndi heklaði dúlluteppi á dúkkurúm. Teppið er 6 dm á lengd og 4 dm á breidd. Hver dúlla er ferningur með hliðarlengdina 1 dm. Hvað eru margar dúllur í teppinu?



Mynd 11. Dúlluteppi

Börn gætu gert sér líkan að þessari þraut með því að teikna mynd sem er skipt í 24 reiti. Þau gætu talið hvern reit fyrir sig, eða fundið öflugri leið til að finna fjölda dúlla, svo sem að leggja 6 saman fjórum sinnum eða tvöfalda (6, 12, 24). Ef börn nota þessar lausnaleiðir þurfa þau að búa til einhvers konar líkan af samhenginu í þrautinni til þess að geta leyst hana. Við lausn á öðrum þrautum gætu börn unnið með einhvers konar rétthyrningslöguð svæði sem skipt er upp í ferningslaga einingar. Þau gætu til dæmis fundið fjölda gólflísa sem þekja gólfið í kennslustofunni eða unnið með mynd af rétthyrningslöguðu svæði sem skipt er upp í jafn stórar einingar (dæmi: götukort, landakort).

Að finna fjölda hluta í rétthyrningslaga fylkjum (röðum - dálkum) felur í sér sömu hugmyndina um margföldun og að finna flatarmál rétthyrnings. Meginmunurinn er sá að fylki (raðir - dálkar) geta verið sett saman úr stökum hlutum (smákökur/bollur á bökunarplötu, raðir af stólum o.s.frv.). Hægt er að setja skipulega fram líkan af fylkjaþrautum með því að búa til tiltekinn fjölda af röðum með sama fjölda af hlutum í hverri röð. Börn geta túlkað sumar þrautir sem ýmist þraut um fylki eða um hópa. Eftirfarandi þraut væri hægt að sjá fyrir sér ýmist sem fylki af stólum eða sem hópa af stólum.

Fyrir leiksýningu í 2. KR var stólunum raðað í 5 raðir með 4 stólum í hverri röð. Hvað voru settir fram margir stólar fyrir leiksýninguna?

Sum börn gætu leyst þessa þraut með því að raða kubbum í fylki með 5 röðum og 4 kubbum í hverri röð, en önnur börn myndu bara búa til 5 hópa með 4 kubbum í hverjum.

Jafnvel þó að það að búa til fylki (raðir - dálka) sé eðlileg framsetning á sumum margföldunar- og deilingarþrautum, setja ung börn sjaldan fram þannig líkan nema þrautin kalli á það.

Í sumu stærðfræðináms efni eru birtar myndir af fylkjum (röðum - dálkum) til að sýna margs konar dæmi um hvernig hægt er að gera líkan til að leysa þrautir um margföldun og deilingu, líka þrautir sem börn myndu ekki setja fram sem fylki (raðir - dálka). Í sumum stærðfræðibókum fylgir oft þrautum um hópa, eins og eftirfarandi þraut, mynd af fylki og þá í þessi tilviki með 4 röðum af gulrótum og 8 gulrótum í hverri röð:

Hve margar gulrætur keypti Sólveig ef hún keypti 4 poka af gulrótum með 8 gulrótum í hverjum poka?

Hér er þá margföldunarþraut, sem börn sjá venjulega fyrir sér sem ákveðinn fjöldi hópa með sama fjöldi í hverjum hópi, sett fram sem fylki. Þetta er ekki röng framsetning á þrautinni en ekki sú tegund af líkani sem ung börn búa til þegar þau leysa þraut af þessari gerð. Höfundar stærðfræðinámsbóka nota oft fylki til að styðja við skilning nemenda á að margföldun er víxlin aðgerð ($3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$). En það er börnum ekki nærtækt að setja fram sem fylki (raðir - dálka) þegar þau leysa þrautir um margföldun nema þrautin sé sett fram á þann hátt (t.d. smákökur/bollur á bökunarplötu).

Í fylkja- og flatarmálsþrautum styður samhengið því á mjög ólíkan hátt við skilning á margföldun og deilingu en samhengið í þrautum um hópa og skiptingu. Þær skýra þannig mikilvæg hugtök sem ekki er auðvelt að tengja við þrautir um hópa og skiptingu. Þrautir um fylki styðja við skilning barna á að margföldun er víxlin aðgerð ($3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$) og flatarmálsþrautir gefa nemendum tækifæri til að þróa skilning sinn á margföldun og deilingu með brotum.

Þrautir um samsetningu

Þrautir um samsetningar sem hægt er að setja saman úr ólíkum mengjum af stökum eru ein tegund af samhverfum þrautum líkt og eftirfarandi dæmi:

Í Gömlu ísbúðinni er hægt að fá ís í þremur mismunandi tegundum af formum (brauðformi, vöflluformi og pappaboxi). Það er líka hægt að velja ís af fjórum bragðtegundum (vanillu, jarðarberjum, súkkulaði og myntu). Hvað er hægt að fá margar ólíkar samsetningar (af formum og bragðtegundum) af ís í Gömlu ísbúðinni?

Þessi þraut er samhverf vegna þess að það er hægt að skipta út tegundum af formum og bragðtegundum af ís. Það er enginn raunverulegur munur á að hugsa um þrautina út frá hve margar bragðtegundir af ís er hægt að setja í hverja tegund af formi eða hve margar tegundir af formi er hægt er að setja hverja tegund af ís í. Hægt er að leysa þrautina með því að setja fram þrjár tegundir af formum og fjórar bragðtegundir af ís og búa raunverulega til allar samsetningarnar. Mörg ung börn eiga í erfiðleikum með að búa til allar samsetningarnar með þessum hætti. Þau vinna ekki alltaf skipulega og búa einungis til fáeinar samsetningar. Þau gætu til dæmis einbeitt sér að því að nota hverja formtegund einu sinni, eða þau vinna ekki skipulega og gera sér því ekki grein fyrir að þau hafa ekki fundið allar samsetningarnar. Önnur börn gætu gert sér grein fyrir að það er ekki nauðsynlegt að setja fram allar samsetningarnar. Þau gætu séð fyrir sér að fyrir hverja tegund af formi er hægt að fá fjórar bragðtegundir af ís og geta hugsað um þrautina sem 3 hópa af 4. Þau gætu líka hugsað um þrautina þannig að hverja bragðtegund af ís er hægt að setja í þrjú ólík brauðform og tengja þrautina þannig við 4 hópa af 3.

Það er ekki jafn mikilvægt fyrir börn á yngsta stigi grunnskóla að fást við samsetningarþrautir til að styðja við skilning þeirra á margföldun og deilingu og hinar tegundirnar, sem rætt hefur verið um hér að framan. Vegna þess hve flóknar þær eru er óþarfi að leggja slíkar þrautir oft fyrir á yngsta stigi. Þær gefa þó tækifæri til að glíma við aðrar tegundir af flóknum þrautum og það getur leitt til gjöfulla umræðna um lausnaleiðir. Jafnvel þó að sum börn gætu átt í

erfiðleikum með að setja skipulega fram samsetningar gætu umræður um þær hjálpað börnum til að átta sig á mikilvægi þess að setja lausnir sínar fram á skipulegan hátt.

Hvað á að gera við afgang?

Börn þurfa að læra að glíma við afgang því í mörgum tilfellum er ekki hægt að skipta jafnt án þess að það verði afgangur. Börn geta leyst þrautir með afgangi með því að nota þær aðferðir sem hér hefur verið lýst. Þrautir þar sem afgangur verður er ekki mikið erfiðara að leysa en þrautir án afangs.

Þegar þrautir með afgangi eru leystar er mikilvægt að taka tillit til hvernig afgangurinn tengist þrautinni. Af samhengi þrautarinnar má yfirleitt ráða hvernig fara þarf með afganginn þegar lausn er fundin. Það eru fjórar mismunandi gerðir af þrautum sem fela í sér afgang. Í eftirfarandi mælideilingardæmi þarf að bæta bíl við fyrir 2 farþega sem verða afangs.

20 krakkar ætla í bíó. Það komast 6 krakkar í hvern bíl. Hvað þarf marga bíla til að allir 20 krakkarnir komist í bíó?

Í næstu tveimur dæmum um mælideilingu annars vegar og skiptingu hins vegar er afgangurinn skilinn eftir og ekki reiknað með honum.

Það þarf þrjú egg til að baka köku. Hvað er hægt að baka margar kökur úr 17 eggjum?

Amma Jóna á 21 blöðru. Hún vill skipta þeim jafnt á milli barnabarnanna sinna 5. Hvað ætti hún að gefa hverju barni margar blöðrur?

Það er augljóst af samhengi þessara þrauta að það er einungis hægt að baka 5 kökur og það er bara hægt að gefa hverju barni 4 blöðrur. Börnin geta annað hvort hunsað afganginn eða lagt til að tvö egg verði sett aftur í ísskápinn og að amma Jóna fái sjálf síðustu blöðruna. Þriðji möguleikinn er að afgangurinn sé svarið við þrautinni eins og í dæmunum hér á eftir um mælideilingu og skiptingu.

Í íþróttavöruverslun eru 26 körfuboltar sem þarf að pakka í kassa. Það komast 3 boltar í hvern kassa. Hvað verða margir boltar afangs ef fylltir eru eins margir kassar og mögulegt er?

Ari á 17 endurskinsmerki og ákveður að skipta þeim jafnt á milli 3 barna. Ef hann gefur hverju barni eins mörg endurskinsmerki og mögulegt er, hvað verða þá mörg endurskinsmerki eftir handa Ara?

Fjórði möguleikinn er að svarið feli í sér brot. Að leysa þannig þrautir getur lagt grunninn að skilningi á brotum og jafngildi brota. Meðfylgjandi er dæmi um þraut um skiptingu þar sem brot er hluti af lausninni.

Guðrún kennari er með 13 pakka af leir sem allir eru í sömu stærð. Hún vill að 4 börn skipti þeim jafnt á milli sín. Hve mikinn leir getur hvert barn fengið?

Heimildir

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2. útg.), 4. kafli. Heinemann.

Þýðing og staðfæring texta: Jónína Vala Kristinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, Háskóla Íslands og Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Háskólanum í Norður-lowa.