

# **Þróunarringur 3**

## **Margföldun og deiling**

### **Tegundir þrauta og lausnaleyðir barna**

Kennarar:

Auður Lilja Harðardóttir og Salóme Halldórsdóttir

# Margföldun og deiling: Tegundir þrauta

Þrautategundirnar tengjast en eru ólíkar með tilliti til þess hvaða stærðir eru þekktar og óþekktar í þrautinni.

- Í margföldunarþraut er markmiðið að finna heildarfjölda staka.
  - Annar þátturinn segir til um fjölda hópa (margfaldari) og hinn þátturinn segir til um stærð hópsins (margföldunarstofn).
- Í deilingardæmum um mælideilingu er markmiðið að finna fjölda mengja.
- Í deilingardæmum um skiptingu er markmiðið að finna fjölda staka í mengi.

**Tafla 1. Prautategund**

Prautategund	Fjöldi hópa	Fjöldi í hópi	Heildarfjöldi
<b>Margföldun</b> Sólveig keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hve margar gulrætur keypti Sólveig?	4	6	Óþekktur
<b>Deiling – mælideiling</b> Sólveig á 24 gulrætur. Hún setur 6 gulrætur í hvern poka. Hve margna poka getur hún fyllt?	Óþekktur	6	24
<b>Deiling – skipting</b> Sólveig á 24 gulrætur. Hún skiptir þeim jafnt í 4 poka. Hve margar gulrætur eru þá í hverjum poka?	4	Óþekktur	24

# Próun lausnaleyða barna

- Hlutbundið líkan sem fylgir sögupræði.
  - Börn búa sér til líkan með því að nota fingur, kubba, skráningu (punkta/strik) eða annað til að tákna fjöldann.
- Talning.
  - Endurtekin samlagning eða hopptalning (telja á tveimur, þremur, fjórum o.s.frv.).
- Talnastaðreyndir og tengslahugsun
  - Börn notfæra sér staðreyndir um tölur sem þau þekkja, s.s.  $2 \cdot 5 = 10$  og  $5 \cdot 5 = 25$ .
  - Álykta út frá staðreyndum s.s.  $3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 4$  og  $4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6$

# Margföldun – hlutbundin lausnaleyð



**Myndband 1.** Hlutbundið líkan – margföldun

- *Sólveig keypti 3 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hvað keypti hún samtals margar gulrætur?*

Lausnarleið Andreu:

- Andrea telur 6 kubba og setur saman í lengju. Hún telur svo aðra 6 kubba saman í lengju og á sama hátt telur hún 6 kubba saman í þriðju lengjuna. Hún telur svo alla kubbana og svarar: „Hún keypti 18 gulrætur.“

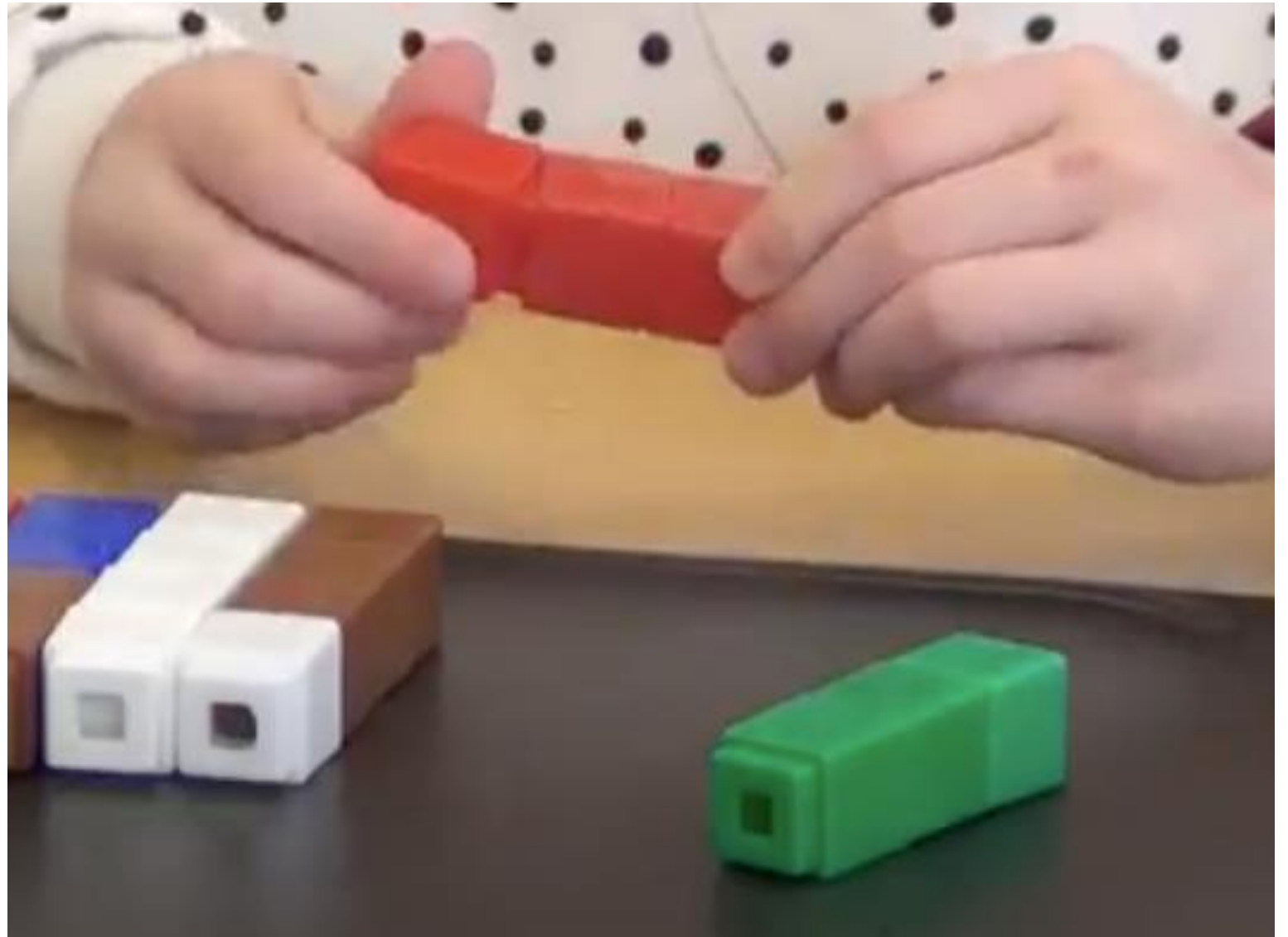
## Mælideiling – hlutbundin leið

*Íþróttaálfurinn setur 20 mandarínur í poka. Hann setur 4 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf íþróttaálfurinn marga poka fyrir allar mandarínurnar?*

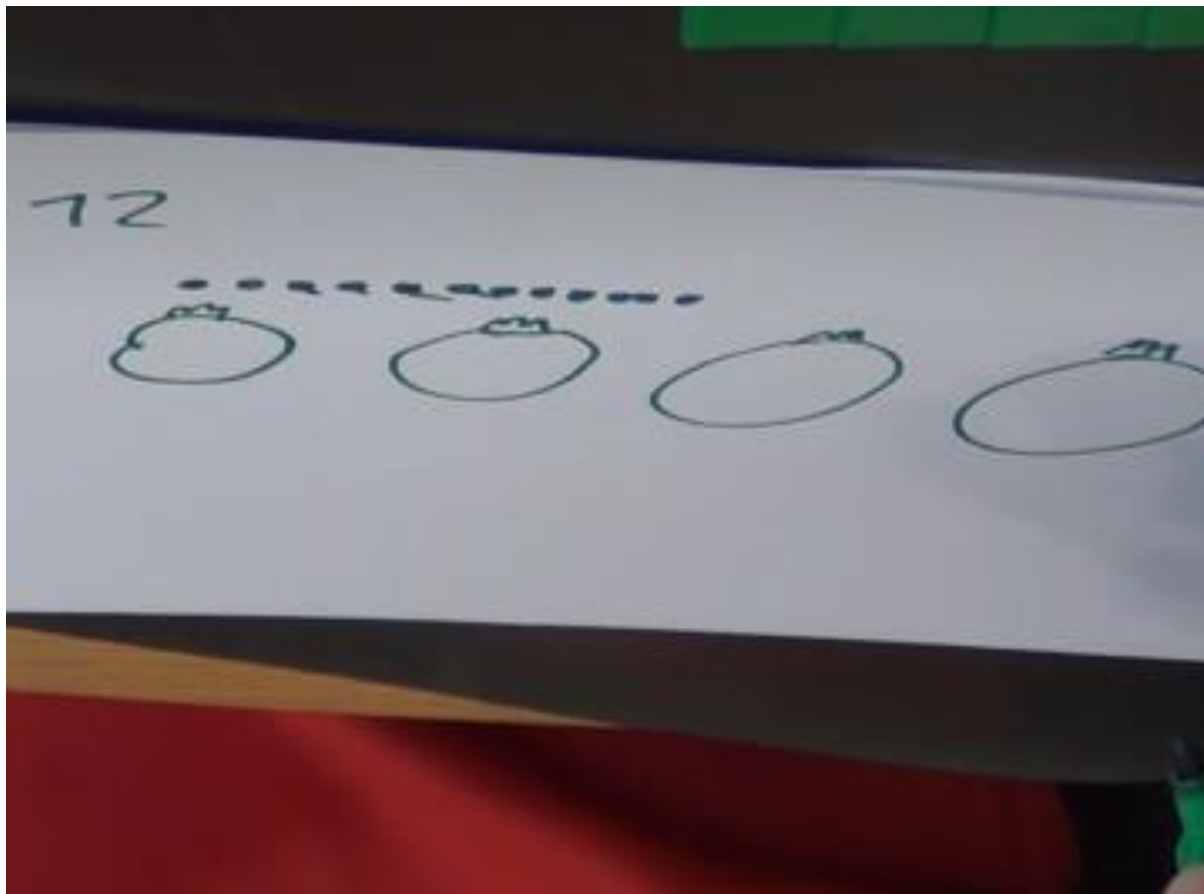
Börnin búa til mengi með þeim fjölda sem tiltekinn er í hverju mengi. Þau telja svo hve mörg mengi þau hafa búið til. Börnin telja ýmist fyrst heildarfjöldann og búa svo til mengin eða telja heildina seinna.

### Myndband 2:

Mælideiling – hlutbundið líkan



# Deiling - skipting



- *Hrund bakar 12 bollur. Hún skiptir þeim jafnt í 4 poka. Hvað eru margar bollur í hverjum poka?*
- Heildarfjöldi staka er skipt í gefinn fjölda mengja og fjöldi staka í einu eða fleirum af mengjunum er talinn til að finna svarið.
- **Myndband 3** – Skipting – hlutbundið líkan – teikning

## Tafla 2. Hlutbundnar lausnaleiðir – margföldun og deiling

Þraut	Lausnaleið
<b>Margföldun</b> Sólveig á 4 poka af gulrótum. Það eru 6 gulrætur í hverjum poka. Hve margar gulrætur á Sólveig samtals?	<b>Hópar</b> Gerir fjóra hópa með 6 kubbum í hverjum. Telur alla kubbana til að finna svarið.
<b>Deiling – mælideiling</b> Sólveig á 24 gulrætur. Þær hafa verið settar í poka. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hve marga poka af gulrótum á hún?	<b>Mæling</b> Setur 24 kubba í hópa með 6 kubbum. Telur fjölda lengja til að finna svarið.
<b>Deiling – skipting</b> Sólveig á 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru jafnmargar gulrætur. Samtals á hún 24 gulrætur. Hve margar gulrætur eru í hverjum poka?	<b>Skipting</b> Skiptir 24 kubbum í 4 hópa með sama fjölda kubba í hverjum hópi. Telur fjölda kubba í einum hópi til að finna svarið.



## Mælideiling talning

*Íþróttaálfurinn á 42 mandarínur sem hann setur í poka. Hann setur 6 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf hann marga poka?*

Arnar telur í huganum og svarar svo „7“. Þegar hann er beðinn að útskýra lausnleiðina segir hann: „Það eru 42 mínus 6 og svo bara mínus 6, 6, 6 þangað til þetta er búið“. Beðinn um nánari skýringu svarar hann: „42 mínus 6 eru 36, mínus 6 eru 30, mínus 6 eru 24, mínus 6 eru 18, mínus 6 eru 12, mínus 6 eru 6.“ hann lyftir einum fingri við hver skref til að sýna hvernig hann heldur utan um talninguna.



Myndband A Hopptalning

Talna- og aðgerðaskilningur barna

# Skipting

- *Ípróttaálfurinn á 24 mandarínur sem hann skiptir jafnt í 6 poka. Hvað fara margar mandarínur í hvern poka?*
- Vandamál er að finna út á hvaða tölu á að telja (fjölda í hverjum hópi).
- Sunna telur, „sjáum til 3,6, 9, 12, 15, 18.“ Í hvert sinn sem Sunna nefnir tölu lyftir hún einum fingri. Þegar hún hefur lyft 6 fingrum stoppar hún. „Nei, það eru ekki nógu margar. Ég ætla að prófa 4. 4, 8, 12, 16, 20, 24.“ Sunna lyftir aftur einum fingri í hvert sinn sem hún nefnir tölu. Þegar hún hefur talið upp í 24 sér hún að hún hefur lyft 6 fingrum. „Þetta er rétt. Það verða 4 í hverjum poka.“

# Margföldun

## Skráning á talningaraðferðum

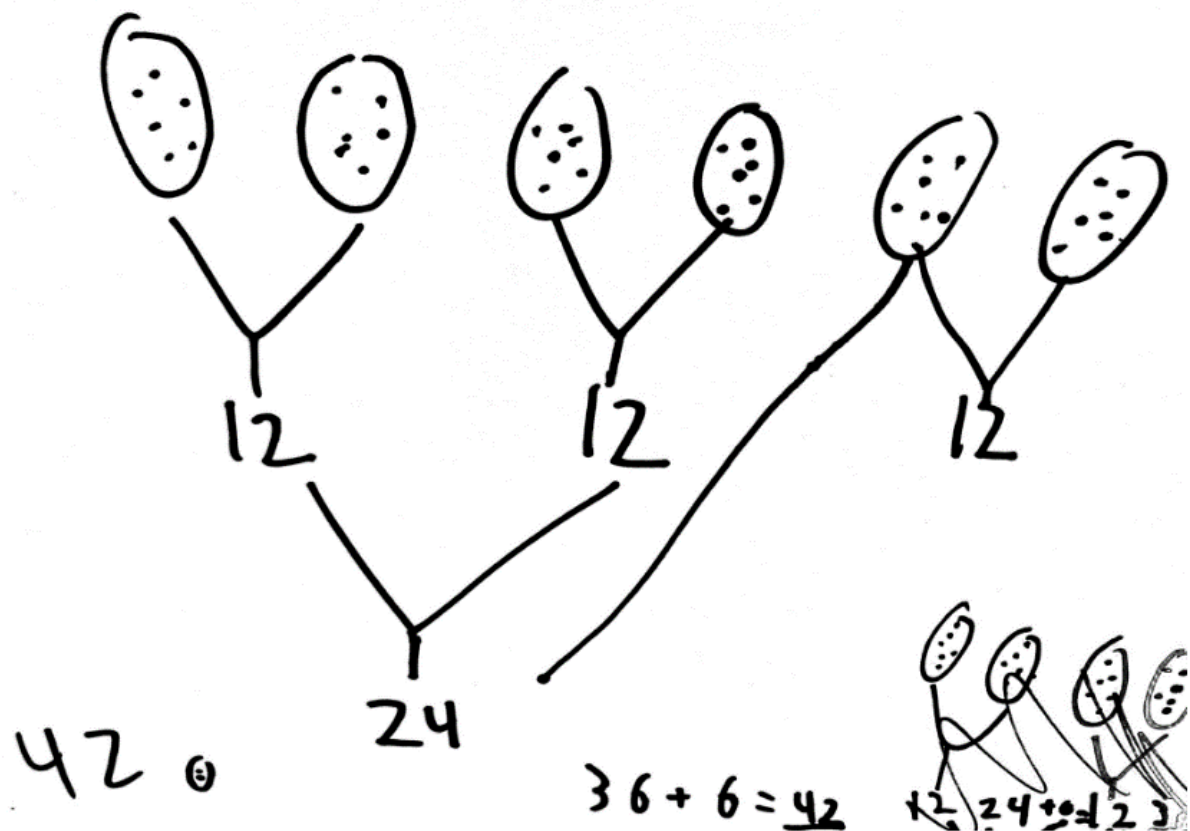
*Elín á fimm pakka af fótboltamyndum. Í hverjum pakka eru fjórar myndir.  
Hve margar myndir á hún?*

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

4   8   12   16   20

20

## Tvöföldun notuð til að leysa dæmi um mælideilingu



- Íþróttaálfurinn setur 42 mandarínur í poka. Hann setur 6 mandarínur í hvern poka. Hvað þarf íþróttaálfurinn marga poka fyrir allar mandarínurnar?

# Talningarleiðir

- **Leiðir við talningu og samlagningu/frádrátt**
  - Lausnaleyðir með talningu á þrautum um margföldun fela oft í sér einhvers konar hopptalningu.
- **Talningarleiðir við mælideilingu**
  - Börn nota sams konar talningar-, samlagningar- og frádráttaraðferðir til að leysa mælideilingardæmi og þau nota við margföldun. Munurinn felst í að börn nota hopptalningu, leggja við eða draga frá þar til þau koma að tölunni sem gefin er. Þau hoppa á tölunni sem segir til um fjölda í hópi.
- **Talningarleiðir við deilingu – skiptingu**
  - Til að nota talningaraðferð sem fylgir ferlinu í þrautinni prófa börn sig oft áfram með ágiskunum. Þau vita hver fjöldi hópa er og einnig heildarfjöldinn. Fjöldi hópanna segir hve margar tölur eiga að vera í hopptalningarrununni og heildarfjöldinn segir hvenær hætta eigi hopptalningunni. Vandamálið er að finna út á hvaða tölu á að telja (fjölda í hverjum hópi). Börn nota sjaldan talningu við skiptingu.

# Margföldun - tengslahugsun

- Jónína keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka voru 12 gulrætur. Hvað keypti jónína margar gulrætur samtals?
- Arnar hugsar sig um nokkra stund og svarar svo „48”. Þegar hann er beðinn um að útskýra svarar hann: „12 plús 12 eru 24. Ég veit að ég er búinn með tvö 12 og á bara tvö eftir. 24 plús 24 eru 48.”



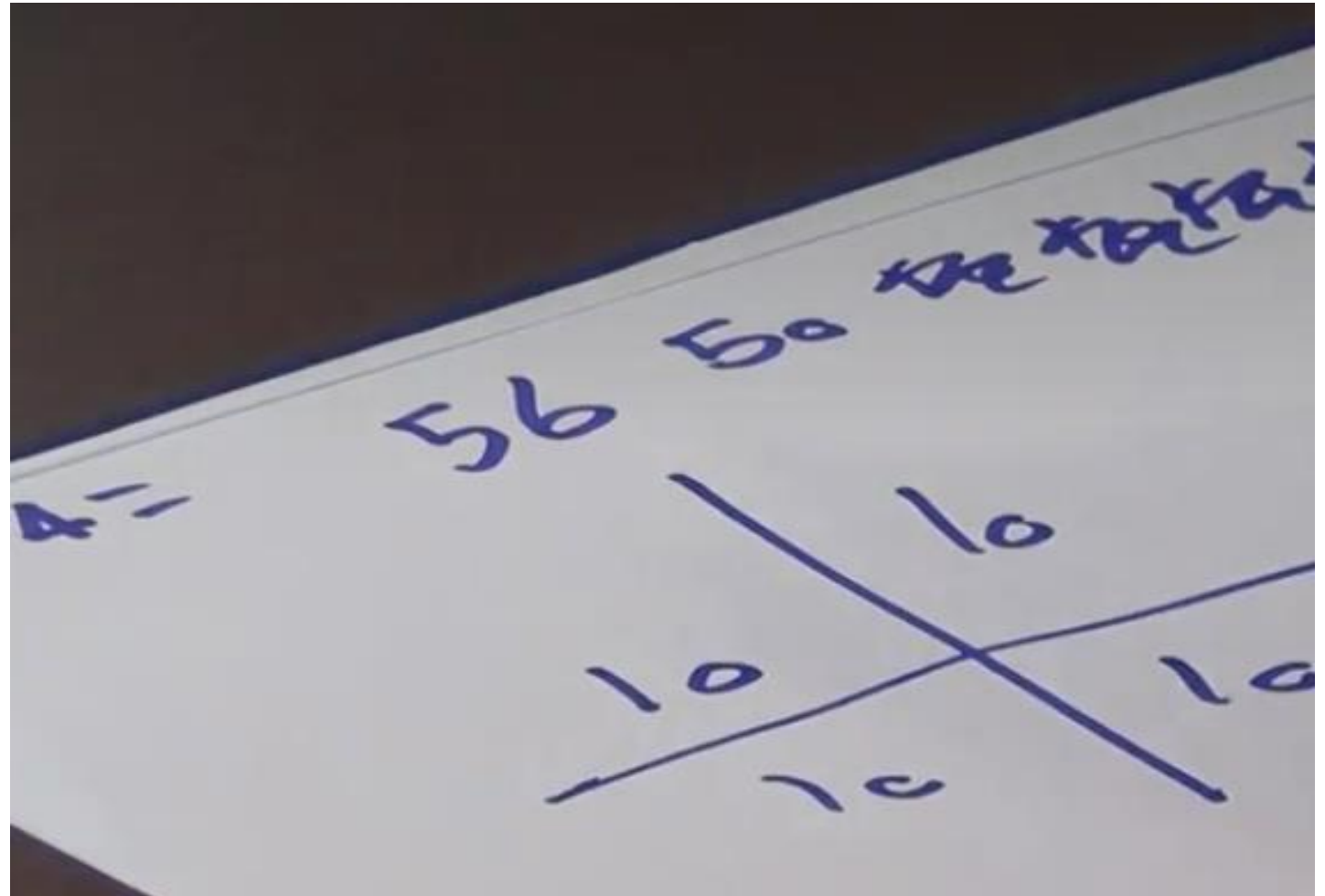
Myndband B Tvöföldun

## Skráning

### Tengslahugsun - skipting

Ágústa bakaði 56 kanilsnúða.  
Hún skipti þeim jafnt í 4 poka.  
Hvað eru margir kanilsnúðar í  
verjum poka?

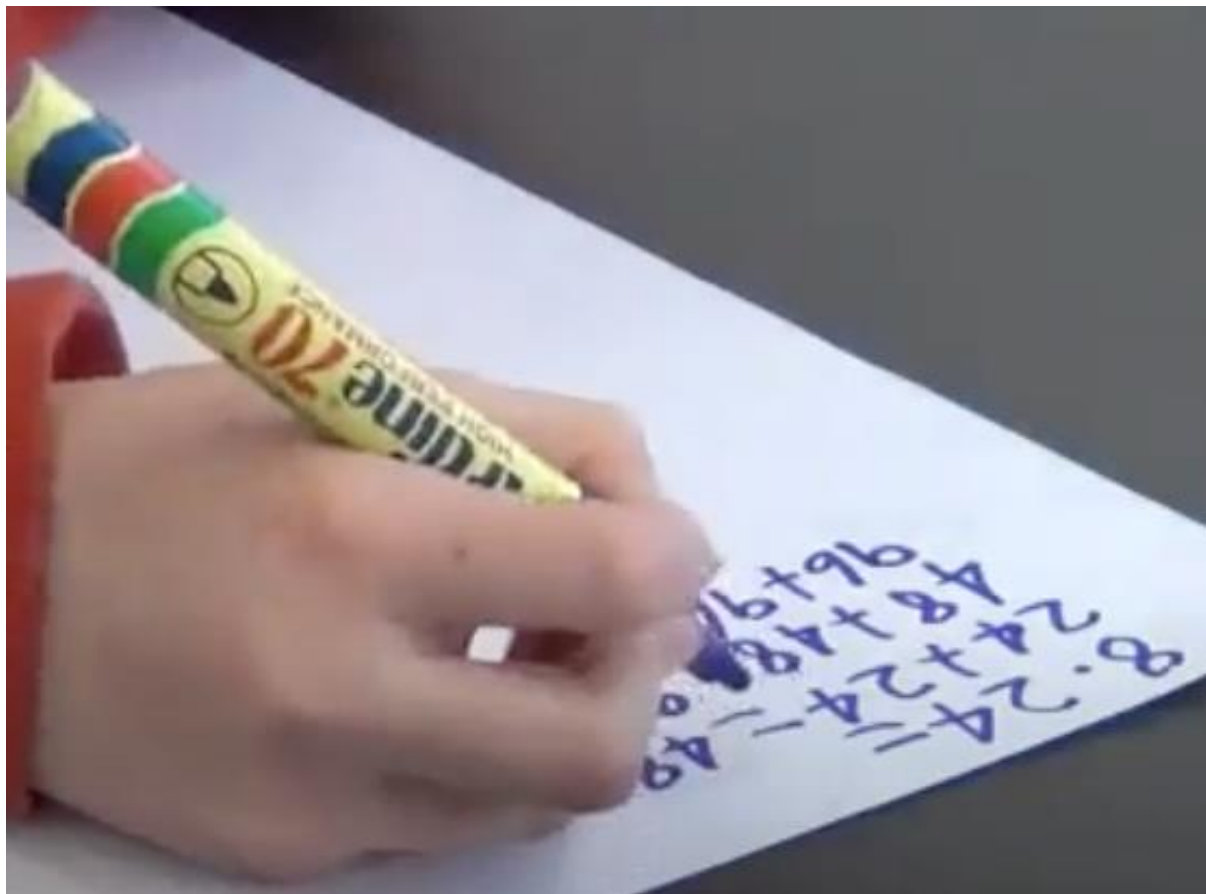
Dísa skiptir í fjóra hópa.  
Skiptir fyrst tugunun og svo  
einingunum.



Myndband C Tengslahugsun - skipting



## Myndband 4: Margföldun – tengslahugsun (tvöföldun og dreifiregla)



- Kiddý á 8 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 24 gulrætur. Hvað á Kiddý margar gulrætur samtals?



# Algeng tengsl sem börn nota til að álykta út frá margföldunarstaðreyndum

Börn læra sumar margföldunarstaðreyndir á undan öðrum. Þau geta nýtt sér staðreyndir sem þau þekkja til að álykta um staðreyndir sem þau þekkja ekki. Algengustu tengslin sem börn nota eru:

- **Margfalda með 3:** Börn sem margfalda tölu 3 sinnum gera sér grein fyrir að 3 hópar af hvaða fjölda sem er, er það sama og 2 hópar af sama fjölda plús 1 hópur í viðbót
- **Margfalda með 4:** Mörg börn átta sig á að 4 sinnum einhver tala er það sama og 2 sinnum talan plús 2 sinnum talan. Barn gæti til dæmis áttað sig á að 4 hópar af 6 er það sama og 2 hópar af 6 plús 2 hópar af 6 í viðbót.  $4 \times 6 = 12 + 12$ ).
- **Margfalda tölu með 5:** Mörg börn læra snemma staðreyndir um margfeldi af 5 og talnarunan fylgir einföldu mynstri. Það virðist börnum auðveldara að margfalda með 5 þegar þau geta séð 5 fyrir sér sem fjölda í hópi, fremur en fjölda af hópum.
- **Víxlregla í margföldun:** Börn verða leiknari í að nota þær aðferðir sem byggja á að draga ályktanir af staðreyndum ef þau skilja að margföldun er víxlin aðgerð ( $a \cdot b = b \cdot a$ ). Börn eiga þó erfiðara með að skilja víxlina eiginleika margföldunar en skilja víxlina eiginleika samlagningar. Í þrautum um jafn stóra hópa er alls ekki augljóst hvers vegna til dæmis það er sami fjöldi í 6 hópum með 9 hlutum og í 9 hópum með 6 hlutum.

## Þrautir um margföldun og deilingu á yngsta stigi grunnskóla

- Ef leikskólabörn fá tækifæri til að fást við þrautir læra þau með reynslunni að leysa margföldunar- og deilingardæmi með því að telja hluti eða teikna til að gera sér líkan af hópunum sem lýst er í þrautinni.
- Í fyrsta og öðrum bekk nota börn oft margs konar aðferðir við að leysa orðadæmi um margföldun og deilingu.
- Ef slíkar þrautir eru felldar inn í námsefni á yngsta stigi fá börn tækifæri til að þróa með sér grundvallarskilning á margföldun og deilingu og jafnframt aukin tækifæri til að leysa þrautir í margs konar samhengi.
- Þegar börn leysa margföldunar- og deilingardæmi fá þau tækifæri til að þróa með sér skilning á þeim grundvallarhugmyndum um hópa sem tugakerfið byggir á.
- Þannig skapa þau sér forsendur til að þróa með sér skilning á þeim, en það er nauðsynleg undirstaða til að skilja tugtölur.
- Það að gefa börnum öflug tækifæri til að á fást við fjölbreytt margföldunar- og deilingardæmi hefur því í för með sér að þau hafa forsendur til að öðlast djúpan skilning á stærðfræði sem hefur merkingu fyrir þeim.

# Fleiri gerðir margföldunar- og deilingaþrauta

- Hvað á að gera við afgang?
  - Stundum verður afgangur og það er áhugavert að skoða slík tilvik.
- Þrautir sem fela í sér mælingu
  - Í sumum þrautum eru ekki teljanlegir hópar. Í stað þess er þar að finna mælingar á magni sem börn geta sýnt. Þrautir um magn sem ekki er hægt að telja eru óhlutbundnari en þrautir sem fela í sér teljanlega hópa með stökum.
- Margföldunarþrautir um samanburð
- Samhverfar þrautir: Flatarmál, raðir/dálkar og þrautir um samsetningar

# Hugsið um eftirfarandi þætti þegar þið horfið á myndklipp

- Hvaða þrautategund er lögð fyrir?
  - Margföldun, skipting eða mælideiling
- Lýsið lausnaleiðinni
  - Leitið eftir mikilvægum stærðfræðilegum hugmyndum og hugtökum
- Greina lausnaleiðina
  - Hvaða lausnaleið nota börnin?
  - Hvaða reiknireglur nýta börnin sér?
  - Hvaða talnasambönd nýta börnin sér?
  - Hvaða tengsl reikniaðgerða nýta börnin sér?

## Heimildir

- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (2015). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction* (2. útg.), 4. kafli. Heinemann.
- Þýðing og staðfæring texta: *Jónína Vala Kristinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir*, Háskóla Íslands og *Ólöf Björg Steinþórsdóttir*, Háskólanum í Norður-Iowa.
- Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2021). „Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum“: Hugsun barna um margföldun. *Skólaþræðir: Tímarit Samtaka áhugafólks um skólaþróun* Birt 24. apríl 2021.